６１７４の不思議　2013 年 8 月 9 日更新

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　情報社会学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

１．カプレカー操作

6174 は実に不思議な数である．また，小学生から大学生まで親しめる数でもある．どんな数であるかを説明する前に簡単な計算をしていただこう．

まず 4 桁の数をひとつ決めなさい．その場合，1111 や 2222 などのように各桁がすべて同じものは除くことにする．例えば，今年の年 2005 としよう．4 桁の数を構成する 4 個の数字を並べ変えて一番大きい数と，一番小さい数を作る．4 桁にならない場合は左側に 0 を埋めて 4 桁にする．2005 の場合は 5200 と 0025 である．そこで，この最大数と最小数の差をとると，

$$5200 - 0025 = 5175$$

になる．このような操作をカプレカー操作という．名前の由来はこの数を発見したインドの数学者，D.R.カプレカーによる．新しくできた数 5175 に対してこの操作を繰り返すと，

$$7551 - 1557 = 5994 \qquad 9954 - 4599 = 5355$$

$$5553 - 3555 = 1998 \qquad 9981 - 1899 = 8082$$

$$8820 - 0288 = 8532 \qquad 8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

になる．

数が 6174 に到達すると，この数が繰り返される．つまり 6174 で循環するのだ．そこで，この数を核と呼ぶことにする．どんな数から始めてもよい．必ず 6174 の核に到達するのである．疑うなら別の数でやってみよう．1789 は次のようになる．

$$9871 - 1789 = 8082 \qquad 8820 - 0288 = 8532$$

$8532-2358=6174$

2005 はカプレカー操作を 7 回で 1789 は 3 回で 6174 に到達した．これらはすべての 4 桁の数に対して成り立つのだ．不思議だろう．小学生にとっては 4 桁の数の引き算の練習になり，大学生にとっては，なぜそうなるのかの理由を考えると，6174 という数はきわめて魅力的な数となる．これから，この数の背景について探ってみたい．

２．連立一次方程式による解法

いま，4 桁の数で並べかえた最大数を $abcd$ とする．この数が循環性を持つ数であるためには，小さい順に並べ変えてできた数 $dcba$ との差 $ABCD$ が｛a, b, c, d｝の組合せで表されることである．

$9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ として，引き算を

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline & A & B & C & D \end{array}$$

とすれば，各位の間には次の関係がある．

$D=10+d-a$

$C=10+c-1-b=9+c-b$

$B=b-1-c$　（ただし $b>c$）

$A=a-d$

(A, B, C, D) の値に $\{a, b, c, d\}$ の組み合わせを対応づけて考えてみる．変数が 4 個で式が 4 個あるから 4 元連立一次方程式となり，解は存在するはずである．$\{a, b, c, d\}$ の組合せは順列の計算から全部で $4!=24$ 通りある．これらの各々について検討すればよい．詳細は省略するが，$(A, B, C, D)=(b, d, a, c)$ のとき，この連立一次方程式を満たす唯一の解となる．これを解いて

$(a, b, c, d)=(7, 6, 4, 1)$

を得る．$abcd-dcba=bdac$ つまり $7641-1467=6174$ となり，核の数は 6174 となる．

3 桁の数にも 4 桁の数の場合と同様な現象がおこることがわかっている．たとえば，3 桁の数を 753 とすると，計算は次のようになる．

$753-357=396 \qquad 963-369=594$

$954-459=495 \qquad 954-459=495$

3 桁の場合は到達する数は 495 で，3 桁のすべての数について成り立つ. 各自，試してみよ.

3．6174 に到達する回数

私が 6174 の話を知人から耳にしたのは 1975 年頃で非常に印象的だった．4 桁のすべての数が 6174 に到達するという美しい事実に驚かされるとともに，高校生程度の知識で簡単に証明できるのではと思ったが意外と計算が複雑であるので未解決のままほっておいた．その後，この件に関する雑誌論文をコピーしておいた. 私は 4 桁の数が有限回で 6174 に落ちつくことをパソコンによって検証してみた．50 行ほどの Visual Basic プログラムで 1000 から 9999 までの 4 桁の数について調べた．この場合，4 桁がすべて同一の数字からなる場合（1111，2222,・・・，9999）を除く 8991 個の自然数に対してである．6174 に到達する回数別の頻度を表 1 に示しておく．到達回数は最大で 7 回であった．7 回でも到達しないとすればどこかで計算違いをしているのである．小学生には 4 桁の数の引き算の練習にはよい教材となるであろう．最初の数が 6174 はカプレカー操作をするまでもなく，6174 であるので到達回数を 0 回とした．

到達回数	頻度
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980
計	8991

表 1．6174 への到達回数

4．6174 に到達する経路

D.R.カプレカーについては，M.ラインズの著書に詳しい(1)．カプレカーは，1940 年代に活躍したインドの数学者である. 問題の帰結を次のように説明している．一般の 4 桁数を $abcd$（ただし $a \geq b \geq c \geq d$）として第 1 回引き算を実行する. 4 桁の最大数は $1000a+100b+10c+d$ で, 最小数は $1000d+100c+10b+a$ となる．最大数から最小数を引き，同類項をまとめると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a)\\
&=1000(a-d)+100(b-c)+10(c-b)+(d-a)\\
&=999(a-d)+90(b-c)
\end{aligned}
$$

さて，$a-d$ は 1 と 9 の間の数値をとり，$b-c$ は 0 と 9 の間の任意の値をとり得るから，上記の形の数は全部で 90 個ある．そこで，確認のため数の表を作成した（表２）．

90X(b−c) \ 999X(a−d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
1	1089	2088	3087	4086	5085	6084	7083	8082	9081
2	1179	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
3	1269	2268	3267	4266	5265	6264	7263	8262	9261
4	1359	2358	3357	4356	5355	6354	7353	8352	9351
5	1449	2448	3447	4446	5445	6444	7443	8442	9441
6	1539	2538	3537	4536	5535	6534	7533	8532	9531
7	1629	2628	3627	4626	5625	6624	7623	8622	9621
8	1719	2718	3717	4716	5715	6714	7713	8712	9711
9	1809	2808	3807	4806	5805	6804	7803	8802	9801

表 2．第 1 回引き算後の数

この表で，$(a-d)\geq(b-c)$ であるから，左下の 36 個（網がけ）については意味のない数である．次に，第 2 回引き算を実行するために，表 2 の数を大きい順に並べ変えると表 3 になる．

90X(b−c) \ 999X(a−d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9990	9981	9972	9963	9954	9954	9963	9972	9981
1	9810	8820	8730	8640	8550	8640	8730	8820	9810
2		8721	7731	7641	7551	7641	7731	8721	9711
3			7632	6642	6552	6642	7632	8622	9621
4				6543	5553	6543	7533	8532	9531
5					5544	6444	7443	8442	9441
6						6543	7533	8532	9531
7							7632	8622	9621
8								8712	9711
9									9801

表 3．第 2 回引き算前の数

この表で残るのは，網がけの重複を除くと 30 個の数である． 30 個の数がどのようにして 6174 に到達するのかを系統図で示したのが図 1 である．これで，すべての 4 桁の自然数が 6174 に到達することが一目にしてわかるであろう．最大 7 回で到達することもわかる．それにしても不思議なものだ．これを発見したカプレカーは，よほど頭がいいのか，よほどの暇人であるかのどちらかであろう．

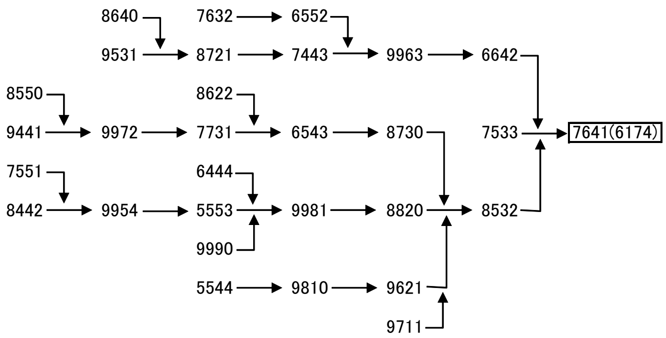

図 1．7641（6174）への系統図

５．循環小数

実数には有理数と無理数がある．有理数は分数 $\dfrac{n}{m}$ （ m, n は整数で $m \neq 0$ ）の形で表せる数をいい，この形で表せない数を無理数という．実数は小数で表す．有理数は有限小数または循環小数になる．一方，無理数は循環しない無限小数になる．例えば，

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420\cdots$

$\pi = 3.14159265358979323846264338327 9\cdots$ である．

有理数の場合の循環小数について説明する．無限に続く小数で，あるところから先は同じ数字の配列（循環節）が繰り返し現れるものを循環小数という．循環小数を表すときには，循環節の最初のものの両端の数字の頭部に・をつけて，それ以後のものを省略する．例えば，

$0.7\dot{2}1\dot{4} = 0.7214214214\cdots$

である．この循環小数は，

$$
\begin{aligned}
0.7\dot{2}1\dot{4} &= \frac{7}{10} + \frac{214}{10^4} + \frac{214}{10^7} + \cdots \\
&= \frac{7}{10} + \frac{214}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right) \\
&= \frac{7}{10} + \frac{214}{10^4} \times \frac{1}{1 - \dfrac{1}{10^3}} \\
&= \frac{7}{10} + \frac{214}{10(10^3 - 1)} = \frac{7207}{9990}
\end{aligned}
$$

と等比級数を用いて表され，等比級数の公式を使えば，分数にすることができる．ここで，分母は$9990 = 2\times 3^3 \times 5\times 37$である．

循環小数は分母の素因数に 2 と 5 以外の素数をもつ有理数である．また，有理数を分類すると，分母を素因数分解したとき，

有限小数　：2 か 5 でできている

純循環小数：2 も 5 も含まない

混循環小数：2 か 5 を含み，それ以外の数も含む

となる．純循環小数は循環節のみで成り立ち，混循環小数は循環節とそれ以外の部分を含んでいる小数をいう．例えば，$\frac{1}{4} = 0.25$は有限小数であり，$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$は純循環小数であり，$\frac{1}{12} = 0.08\dot{3}$は混循環小数である．なぜなら$4 = 2^2, 7 = 7, 12 = 2^2 \times 3$　であるから．この循環小数をカプレカー操作に対応させることができる．数が 3 桁と 4 桁の場合は，有限回の操作でそれぞれ 495 と 6174 に到達するから・が，1 つの混循環小数の形に似ている．

6．　2 桁や 5 桁以上の場合はどうなるか

4 桁や 3 桁の数は唯一の数に到達するが 2 桁の場合はどうだろうか．例えば 28 から始めて最大－最小のカプレカー操作を繰り返すと，

28　82-28=54　54-45=9　90-09=81　81-18=63

63-36=27　72-27=45　54-45=9

となり，9 を中心に 9→81→63→27→45→9 の循環をする．したがって，数が 2 桁の場合は, ある範囲の数を循環する・が 2 つの混循環小数の形に似ている．

つぎに 5 桁の数についてはどうだろうか. まず 5 桁の数について 6174 や 495 のような核が存在するだろうか．これは$9 \ge a \ge b \ge c \ge d \ge e \ge 0$としたとき，5 桁の最大－最小 $abcde - edcba = ABCDE$ の (A, B, C, D, E) を $\{a, b, c, d, e\}$ の 120 通りの組合せの中から選ぶという，条件つき場合分けの連立一次方程式の問題である． 5 桁のカプレカー問題については，すでにコンピュータでかなりの量の計算が行われていて，それによると核は存在せず，すべての 5 桁の数は

次の 3 つのループに入ることが知られている．すなわち，

71973→83952→74943→62964

75933→63954→61974→82962

59994→53955

である．

6 桁あるいはそれ以上の整数については，桁数の増加とともに急速に退屈な，時間のみを費やすものとなるであろうと M.ラインズは指摘しているが，核の存在の結果を示すと表 4 の通りである．

これによると，6 桁や 8 桁には核が 2 つも存在していることになり，この場合は核に到達するケースとループに入るケースが混在することになる．1 ワード＝32 ビットのコンピュータでは，整数は 32 ビットで表されるから，$2^{31}-1(=2147483647)$ のおよそ 10 桁の初めまで計算は可能だが，M.ラインズの言うとおり，私も馬鹿馬鹿しくなりやめることにした．

私は，この問題のルーツを知りたくて，もう少し調べてみることにした．M.ガードナーの著書(2)にめぐりあい，このあたりの事情がわかった．巻末の説明に「数 6174 は，インドのデブラリのダッタトラヤ・ラムチャンドラ・カプレカー（Dattatraya Ramchandra Kaprekar）の名に因んでカプレカー定数とよばれる．彼はその重要性を初めて『他の一人遊び』Scripta Mathematica，15（1949 年），P．244～245 に表し，その後『数 6174 の興味ある性質』（1955 年），『新しい定数 6174』（1959 年），『5 桁整数全部からの新しい再帰巡回定数』（1963 年）を発表している」とある．どうも，このあたりが真相らしい．コンピュータの幕開けとともに脚光をあびた数であるのだろう．

M.ガードナーは，1，2，5，6，7 桁にはカプレカー定数が存在しないとしている．しかし，先に示したように 6 桁の数には 2 個の核が存在している（この場合はカプレカー定数とは言わない）．さらに，氏は 8，9，10 桁について核を教えてくれている．8 桁は 97508421，9 桁は 864197532，10 桁は 9753086421 である．引き算は次の通

2桁	なし	
3桁	495	唯一
4桁	6174	唯一
5桁	なし	
6桁	549945，631764	
7桁	なし	
8桁	63317664，97508421	

表 4.　核の数

りである．

$98754210 - 01245789 = 97508421$

$987654321 - 123456789 = 864197532$

$9876543210 - 0123456789 = 9753086421$

ここで，9 桁と 10 桁については形が美しいから，直観で求めたものであろう．8 桁についてはコンピュータで処理したのだろうか．または電卓と筆算かも知れない．コンピュータの力を借りなくてもわかる方法があればよい．また機会があれば別の方法で調べてみることにする．興味の残る問題である．なお， D. ウェルズの著書をあげておく(3)．この本には歴史上の興味ある，あらゆる数について書かれている．

７．偶然か必然か

循環数の存在は連立一次方程式から明らかである．3 桁の場合は 495 が，4 桁の場合は 6174 が唯一の循環数であることを証明した．また，すべての 3 桁の数は 495 に到達し，すべての 4 桁の数は 6174 に到達することを確認した．しかし，これは確認しただけであって，すべての数がなぜこの循環数に到達するかの本当の理由は証明できていないように思う．

3 桁と 4 桁の場合にのみ成り立つのは偶然なのだろうか必然なのだろうか．私は，偶然のような気がする．そこで以前に解いた次のようなパズルを紹介しておこう(4)．

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ \times \quad \square\square\square\square\square \\ \hline 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \end{array}$$

この虫食い算パズルで□の中に数字を入れるというものだが，形があまりにも美しいので，この背景には何か数学上の一大定理が潜んでいるのではないかと期待に胸をふくらませたが，これは，たんなる偶然であることがわかった．このパズルの周辺には

$$
\begin{array}{r}
\square\square\square\square\square \\
\times\quad \square\square\square\square\square \\
\hline
1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 4
\end{array}
$$

下のような問題がゴロゴロ存在していることを確認した．カプレカー問題は，この虫食い算パズルに類似しているように思える．参考までに前者の解法は123456789 を素因数分解することがコツで，

$123456789 = 3 \times 3 \times 3607 \times 3803$

を応用して，答えは10821×11409となる．同様にして，後者は

$123456784 = 2^4 \times 11^2 \times 43 \times 1483$

を応用して，答えは10406×11864となる．

数学や科学は，歴史上において「誤解」がその発展を促してきたという側面がある．虫食い算パズルにおいて，前者を出せば解いてみようという気持ちが起こるが，後者の場合は見向きもしないだろう．なぜなら前者はあまりにも美しい形をしているからだ．カプレカー操作によって 4 桁のすべての数が 6174 に到達し，3 桁のすべての数が 495 に到達することを知っただけで，数学の問題としての魅力は十分である．これは，たんなる偶然だと，誰が明言できようか．この背景には数論の一大定理が潜んでいるのではと期待する．この期待は「美しい誤解」に終わるかもしれないが，偶然だとは信じたくないものだ．

参考文献

(1) M.ラインズ，片山孝次訳「数 6174 の特性とは何か」『数－その意外な表情』岩波書店，1988.2

(2) M.ガードナー，一松信訳『メイトリックス博士の驚異の数秘術』紀伊國屋書店，1978.10

(3) D.ウェルズ，芦ケ原伸之・滝沢清訳『数（すう）の事典』東京図書，1987.12

(4) 西山豊「美しいパズル」『くらしのアルゴリズム』ナカニシヤ出版，1989.4

初出：西山豊「6174 の不思議」『理系への数学』2006 年 1 月，Vol.39, No.1, 9-12